UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Enero-Marzo 2002-Primer Parcial

1. Halle el dominio de definición de la función $f(x)$ dada por:
   $f(x) = \sqrt[3]{sen(x)} + \sqrt{x^2-4} + \sqrt{1-|x+2|}$
   Solución: Para que $f(x)$ tenga sentido debe ser $\left\{ \begin{array}{lcl} x^2-4 & \geq & 0 \\ |x+2| & \leq & 1 \end{array} \right.$ y
   $x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$
   Por otro lado, $|x+2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow x \in [-3,-1]$
   Por lo tanto, el dominio de f es la intersección de los conjuntos hallados:
   $D_f = ((-\infty,-2] \cup [2,\infty)) \cap [-3,-1] = [-3,-2]$
   $\therefore \boxed{D_f = [-3,-2]}$

2. Halle el límite: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x|-\sqrt{2x+8}}{x+2} = L$
   Solución: Cerca de $x=-2,\;\; |x| = -x$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to -2} \frac{-x-\sqrt{2x+8}}{x+2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(-x-\sqrt{2x+8})(-x+\sqrt{2x+8})}{(x+2)(-x+\sqrt{2x+8})} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-(2x+8)}{(x+2)(-x+\sqrt{2x+8})} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(-x+\sqrt{2x+8})} \\
&= \frac{-2-4}{2+\sqrt{-4+8}} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \quad \therefore \boxed{L = \tfrac{-3}{2}}
\end{aligned}
$$

3. Sean l y s las rectas de ecuación $5x-12y=0,\;\; x-2y=1$ respectivamente. Sea A el punto de intersección de estas dos rectas.
   a) Halle la ecuación de la circunferencia Γ, que pasa por el origen $(0,0)$ y tiene centro A.
   b) Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia Γ en el punto $(0,0)$ (el origen).

   Solución: Primero hallamos las coordenadas del centro A :

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} 5x & = & 12y \\ x-2y & = & 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{5}y - 2y = 1
$$

$$
\Rightarrow \quad \frac{2}{5}y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \therefore \quad A(6,5/2)
$$

   El radio r es la distancia de este punto al origen: $\sqrt{6^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{36+\frac{25}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{169} = \frac{13}{2}.$

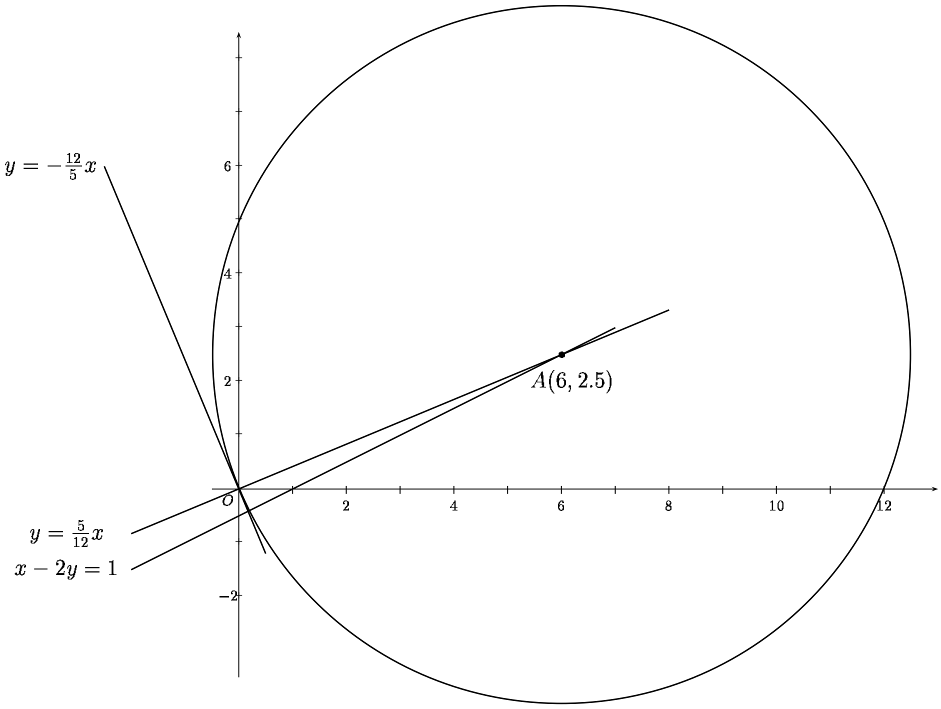
a) $\therefore \boxed{\Gamma : (x-6)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2}$

b) Pendiente del segmento oA : $\dfrac{5/2}{6} = \dfrac{5}{12}$

$\therefore$ Pendiente de la recta tangente: $-\frac{12}{5}$

$\therefore$ La ecuación de la recta tangente a Γ en $(0,0)$

es $\boxed{y = \frac{-12}{5}x}$



4. Sea $f(x)$ la función dada por: $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

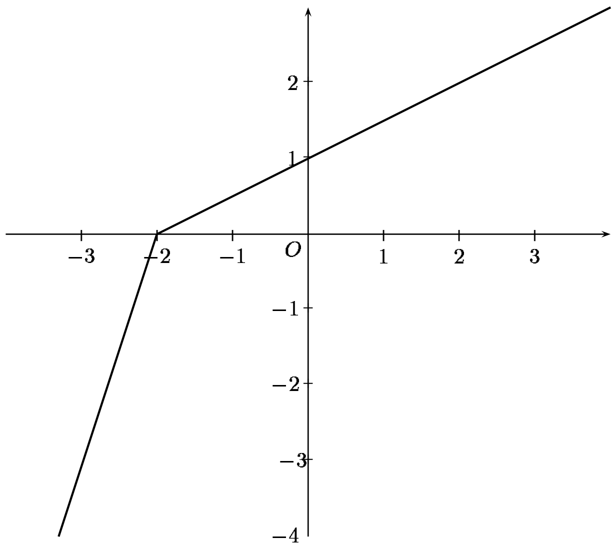
a) Bosqueje la gráfica de $f(x)$.

b) Demuestre que $f(x)$ tiene inversa.

c) Describa la inversa $f^{-1}(x)$ con fórmulas.

d) Bosqueje la gráfica de $f^{-1}(x)$.

Solución:

a) 

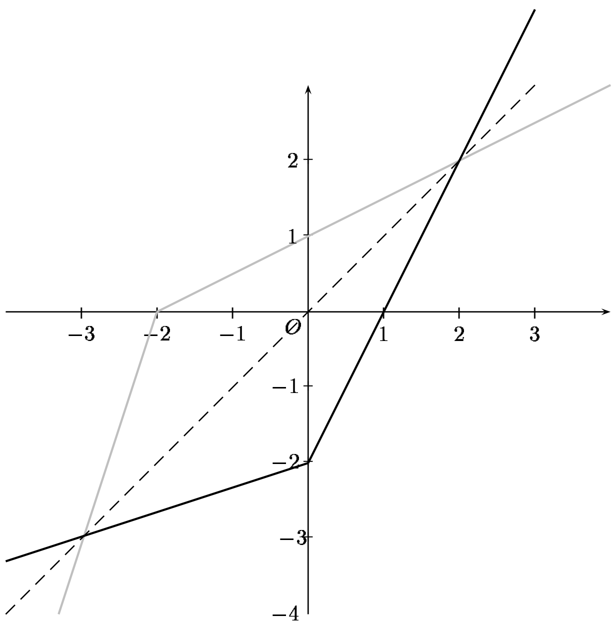
b) f tiene inversa pues f es inyectiva: Toda recta paralela al eje x corta el gráfico de f en un punto.

c) $y = 3x + 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{1}{3}y - 2$

$y = \dfrac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow x = 2y - 2$

Nota: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2 \quad \therefore \boxed{f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$

d)



(Se refleja el gráfico de f por el eje $y = x$ para obtener el gráfico de f^{-1}).

5. Si en un circuito eléctrico se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, la resistencia neta R está dada por la relación: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Si $R_1 = 10$ ohms (Ω), ¿Qué valores de R_2 dan por resultado una resistencia neta de menos de 2Ω?

Solución:

$$\begin{aligned} R < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad R_1^{-1} + R_2^{-1} > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad R_2^{-1} > \frac{1}{2} - R_1^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad R_2 < \left(\frac{1}{2} - R_1^{-1}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Si $R_1 = 10$, esto equivale a que $R_2 < \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10}\right)^{-1} = \left(\dfrac{4}{10}\right)^{-1} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} = \dfrac{5}{2}$

$\therefore$ Los valores correspondientes de R_2 son los menores que $5/2$ ohms.